1. Les générations imbriquées d'agents égoïstes

1.1 La population

N_{t-1}^{j} N_{t-1}^{v}

t-1__________t___________t+1

N_{t}^{j} N_{t}^{v}

t ___________t+1___________t+2

N_{t+1}^{j} N_{t+1}^{v}

t+1___________ t+2___________t+3

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = (n+1) \tag{1}$$

1.2 Les consommateurs

quand il est jeune en t : $c_t^j + s_t = w_t$ (2)

quand il est vieux en t+1 : $c_{t+1}^v = (1+r_{t+1}).s_t$ (3)

La contrainte intertemporelle est donc : $c_t^j + \dfrac{c_{t+1}^v}{1+r_{t+1}} = w_t$

Sa fonction d'utilité est en t : $V_t = u(c_t^j) + \dfrac{u(c_{t+1}^v)}{1+\rho}$ avec $\rho > -1$ (4)

La condition du premier ordre est : $\dfrac{\partial V_t}{\partial s_t} = \dfrac{\partial u(c_t^j)}{\partial c_t^j}\dfrac{\partial c_t^j}{\partial s_t} + \dfrac{1}{(1+\rho)}\dfrac{\partial u(c_{t+1}^v)}{\partial c_{t+1}^v}\dfrac{\partial c_{t+1}^v}{\partial s_t} = 0$

Soit : $\dfrac{\partial V_t}{\partial s_t} = -\dfrac{\partial u(c_t^j)}{\partial c_t^j} + \dfrac{(1+r_{t+1})}{(1+\rho)}\dfrac{\partial u(c_{t+1}^v)}{\partial c_{t+1}^v} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{u'(c_t^j)}{u'(c_{t+1}^v)} = \dfrac{1+r_{t+1}}{1+\rho}$ (5)

Tableau 1 : TMS pour deux fonctions d'utilité habituelles

u	$u = ln(c)$	$u = \dfrac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$
$\dfrac{u'(c_t^j)}{u'(c_{t+1}^v)} = \dfrac{1+r_{t+1}}{1+\rho}$	$\dfrac{c_{t+1}^v}{c_t^j} = \dfrac{1+r_{t+1}}{1+\rho}$	$\dfrac{c_{t+1}^v}{c_t^j} = \left(\dfrac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right)^{1/\sigma}$

En utilisant la fonction ln : $V_t = \ln c_t^j + \dfrac{\ln c_{t+1}^v}{1+\rho}$:

Le lagrangien est $L = \ln c_t^j + \dfrac{\ln c_{t+1}^v}{1+\rho} - \lambda\left[c_t^j + \dfrac{c_{t+1}^v}{1+r_{t+1}} - w_t\right]$

La condition du premier ordre : $\dfrac{c_{t+1}^v}{c_t^j} = \dfrac{1+r_{t+1}}{1+\rho}$.

La solution [1] : $s_t = \dfrac{1}{2+\rho} w_t \qquad c_t^j = \dfrac{1+\rho}{2+\rho} w_t \qquad c_{t+1}^v = \left(1+r_{t+1}\right)\dfrac{w_t}{2+\rho}$ (6)

En utilisant $u = \dfrac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$, on obtiendrait $s_t = \dfrac{\left(1+r_{t+1}\right)^{1-\sigma/\sigma}}{\left(1+\rho\right)^{1/\sigma}+\left(1+r_{t+1}\right)^{1-\sigma/\sigma}}.w_t$.

1.3 Les producteurs

La production de la période t est : $Y_t = f(K_t, A.L_t)$

Le profit est : $Y_t - w_t L_t - (r_t + \delta)K_t = 0$

En concurrence, on a : $w_t = f(k_t) - k_t.f'(k_t)$ et $r_t + \delta = f'(k_t)$.

Pour la fonction Cobb-Douglas : $Y_t = K_t^{\alpha}.L_t^{1-\alpha}$ ou en divisant par $L_t = N_t$: $f(k_t) = k^{\alpha}$,

$$w_t = (1-\alpha).k_t^{\alpha} \tag{7}$$

$$r_t = \alpha.k_t^{\alpha-1} - \delta \tag{8}$$

1.4 Équilibre concurrentiel

L'investissement de la période t,t+1 est : $I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t$

L'épargne globale nette de la période t : $N_{t-1}s_{t-1} = K_t - \delta K_t$.

L'épargne globale de la période t,t+1 est : $S_t = N_t s_t - \left(K_t - \delta K_t\right)$

A l'équilibre, $I_t = S_t$ s'écrit donc dans le modèle OLG :

$$K_{t+1} - K_t + \delta K_t = N_t.s_t - K_t + \delta K_t, \qquad \Leftrightarrow \qquad K_{t+1} = N_t.s_t.$$

En divisant par N_t, on obtient $\dfrac{K_{t+1}}{N_t} = \dfrac{N_t.s_t}{N_t}$ et puisque $N_t = \dfrac{N_{t+1}}{(1+n)}$:

$$\boxed{(1+n)k_{t+1} = s_t} \tag{9}$$

C'est ainsi que nous écrirons la condition d'équilibre sur le marché du capital. Cette écriture résulte de l'introduction de la désépargne pour la retraite dans le modèle OLG[2].

[1] De la condition du premier ordre on a $c_{t+1}^v = \dfrac{1+r_{t+1}}{1+\rho}.c_t^j$ En égalisant avec (2) on a : $c_t^j = (1+\rho).s_t$

En portant cette expression de c_t^j dans (1) on a : $(1+\rho).s_t + s_t = w$ et donc $s_t = \dfrac{w_t}{2+\rho}$

$s_t = \dfrac{w_t}{2+\rho} = \dfrac{\left(1-\alpha\right)y_t}{2+\rho} = \dfrac{\left(1-\alpha\right)}{2+\rho}y_t = \varsigma.y_t$ où $\boxed{\varsigma = \dfrac{1-\alpha}{2+\rho}}$ est le **taux d'épargne des jeunes.** Mais les vieux désépargnent et (voir encadré) le **taux d'épargne** de l'économie est $\zeta = \dfrac{1-\alpha}{2+\rho}\left(\dfrac{\delta+n}{1+n}\right)$

[2] Solow : $I = S \Rightarrow DK + \delta K = S \Rightarrow DK = sY - \delta K$

OLG : $I = S \Rightarrow K_{t+1} - K_t + \delta K_t = S_t^j - Désépar_t^v = S^j - K_t + \delta K_t \Rightarrow K_{t+1} = S_t^j$

Dans le modèle de Solow, l'épargne augmente le stock de capital. Dans le modèle OLG, l'épargne des jeunes rachète le stock de capital désépargné par les vieux (éventuellement elle l'augmente, s'il y a plus de jeunes).

1.5 Dynamique transitoire et état régulier

$$k_{t+1}=\frac{s_t}{1+n}=\frac{s_t\left(w(k_t),r(k_{t+1})\right)}{1+n}=\frac{s_t\left(f(k_t)-k_t.f'(k_t),f'(k_{t+1})\right)}{1+n}$$

Avec la Cobb-Douglas en remplaçant s_t par (5) et w_t par (6), l'équation de récurrence est[3] :

$$k_{t+1}=\frac{(1-\alpha).k_t^{\alpha}}{(1+n).(2+\rho)} \tag{10}$$

$$\boxed{k^*=\left[\frac{(1-\alpha)}{(1+n).(2+\rho)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}=\left[\frac{\alpha}{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}(1+n).(2+\rho)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}=\left[\frac{\zeta}{(n+\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}} \tag{11}$$

$$f'(k^*)=\alpha.k^{*(\alpha-1)}=\frac{\alpha}{1-\alpha}(1+n)(2+\rho) \tag{12}$$

Encadré : Modèle OLG résolu comme le modèle de Solow

1) Calcul du taux d'épargne macroéconomique

L'épargne globale de la période t,t+1 est : $S_t=N_t s_t-\left(K_t-\delta K_t\right)$

$S_t=N_t\varsigma y_t-\varsigma Y_{t-1}+\delta\varsigma Y_{t-1}$ donc $\frac{S_t}{Y_t}=\varsigma\frac{Y_t}{Y_t}-\varsigma\frac{Y_{t-1}}{Y_t}+\delta\varsigma\frac{Y_{t-1}}{Y_t}$ donc $\frac{S_t}{Y_t}=\varsigma-\varsigma\frac{1}{(1+n)}+\delta\varsigma\frac{1}{(1+n)}$

Le taux d'épargne macroéconomique est : $\zeta=\varsigma\left(1-\frac{1}{(1+n)}+\frac{\delta}{(1+n)}\right)=\varsigma\left(\frac{\delta+n}{1+n}\right)$

Sachant que $\varsigma=\frac{(1-\alpha)}{2+\rho}$(voir nbp9) Le taux d'épargne est : $\zeta=\left(\frac{1-\alpha}{2+\rho}\right)\left(\frac{\delta+n}{1+n}\right)$

2) l'équation dynamique fondamentale.

A l'équilibre, on a $I_t=S_t$ que l'on peut écrire maintenant $I_t=\zeta Y_t$

$K_{t+1}-K_t+\delta K_t=\zeta Y_t$ en divisant par N

$k_{t+1}\left(1+n\right)-k_t+\delta k_t=\zeta y_t$

$k_{t+1}\left(1+n\right)=\zeta k_t^{\alpha}+\left(1-\delta\right)k_t$ soit $k_{t+1}=\frac{\zeta k_t^{\alpha}}{(1+n)}+\frac{(1-\delta)}{(1+n)}k_t$

$k_{t+1}-k_t=\frac{\zeta k_t^{\alpha}}{(1+n)}+\left(\frac{(1-\delta)}{(1+n)}-1\right)k_t$ soit $k_{t+1}-k_t=\frac{1}{(1+n)}\left[\zeta k_t^{\alpha}-\left(n+\delta\right)k_t\right]$

A l'ER $k_{t+1}-k_t=0$ et donc l'épargne est égale à l'investissement requis : $\zeta k_t^{\alpha}=\left(n+\delta\right)k_t$

et $k^*=\left[\frac{\zeta}{(n+\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ soit encore $k^*=\left[\frac{\left(\frac{1-\alpha}{2+\rho}\right)\left(\frac{\delta+n}{1+n}\right)}{(n+\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}=\left[\frac{\varsigma}{(1+n)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$

[3] L'équation de récurrence (10) est identique à l'équation dynamique fondamentale du modèle de Solow, voir encadré 2.

1.6 Consommation des jeunes et des vieux

Des équations : $c_t^j + s_t = w_t$, $c_{t+1}^v = \left(1+r_{t+1}\right).s_t$, $w_t = (1-\alpha).k_t^\alpha$ $r_t = \alpha.k_t^{\alpha-1} - \delta$, $(1+n)k_{t+1} = s_t$

On obtient $w_t - c_t^j = \dfrac{c_{t+1}^v}{\left(1+r_{t+1}\right)} = (1+n)k_{t+1}$ soit $(1-\alpha)k_t^\alpha - c_t^j = \dfrac{c_{t+1}^v}{\left(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} - \delta\right)} = (1+n)k_{t+1}$

Donc : $c_t^j = (1-\alpha)k_t^\alpha - (1+n)k_{t+1}$ et $c_{t+1}^v = (1+n)k_{t+1}\left(1-\delta+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}\right)$

La consommation totale en t est : $C_t = N_t c_t^j + N_{t-1} c_t^v$. En divisant par N_t on défini la consommation totale par travailleurs en t : ***Définition*** : $c_t = c_t^j + \dfrac{c_t^v}{(1+n)}$

A l'état régulier on obtient :

$$c^j = (1-\alpha).k^\alpha - (1+n)k \qquad c^v = (1+n)(1-\delta)k + (1+n)\alpha.k^\alpha \tag{13}$$

$$c = k^\alpha - \left(n+\delta\right)k \tag{14}$$

Figure 2 : Préférence pour le présent et consommations des jeunes et des vieux

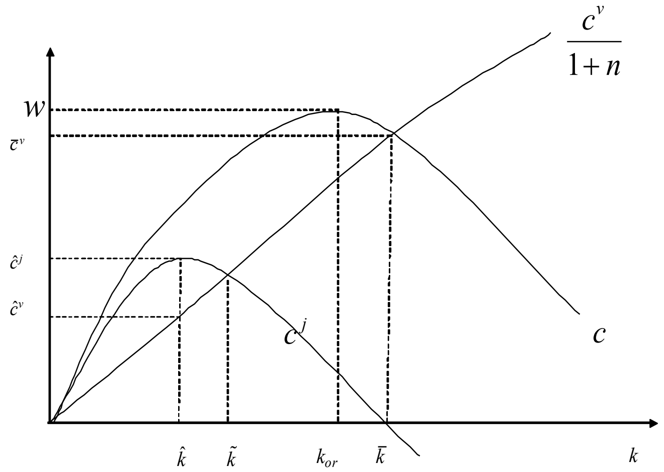
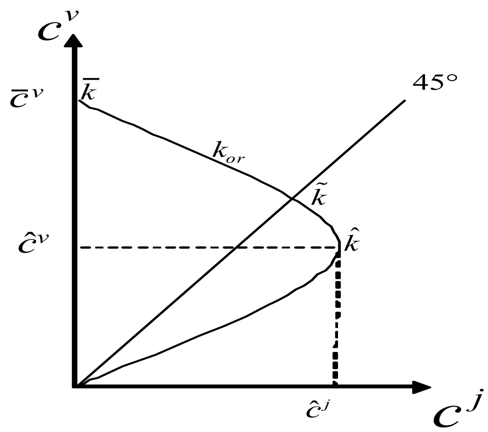


Figure 3 : Courbe des possibilités de consommation d'état régulier



- Le long de la courbe des possibilités de consommation $(0, \bar{c}^v)$, le capital par tête augmente de 0 *à* $\bar{k}$.[4] le taux de préférence pour le présent diminue
-si $k=0$ alors $c^j = 0$ et $c^v = 0$
-si $k = \bar{k}$ alors $c^j = 0$ et $c^v = \bar{c}^v$
-si $k = \hat{k}$ alors $c^j = \hat{c}^j$ et $c^v = \hat{c}^v$
-si $k = \tilde{k}$ alors $c^j = c^v$ sur la droite à 45°

---

[4] Remarque : il est difficile de calculer l'équation de la CPC, mais facile de calculer sa pente : $\dfrac{dc^v}{dc^j} = \dfrac{dc^v/dk}{dc^j/dk} = \dfrac{(1+n)\alpha^2 k^{\alpha-1}}{(1-\alpha)\alpha k^{\alpha-1} - (1+n)}$. Elle est positive pour les valeurs de k inférieures, négative pour les valeurs supérieures à $\hat{k} = \left(\dfrac{\alpha(1-\alpha)}{1+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ qui est le capital qui maximise la consommation de jeunes.

1.7 Inefficience dynamique dans le Modèle OLG

1.7.1 La règle d'or.

La contrainte d'accumulation (Y-I=C) de l'économie en t s'écrit ici :

$$F(K_t,N_t)-\left(K_{t+1}-K_t+\delta K_t\right)=N_t.c_t^j+N_{t-1}.c_t^v \Leftrightarrow f(k_t)-\left((1+n)k_{t+1}-(1-\delta)k_t\right)=c_t^j+\frac{1}{(1+n)}.c_t^v$$

A l'état régulier $c^{*j}+\frac{1}{(1+n)}.c^{*v}=c^*$. La contrainte d'accumulation devient :

$$f(k^*)-\left(n+\delta\right)k^*=c^* \qquad (15)$$

règle d'or :

$$\boxed{f'(k^{or})=n+\delta} \qquad (16)$$

Avec $f(k)=k^\alpha$, on a $f'(k)=\alpha k^{\alpha-1}$:

$$\boxed{k^{or}=\left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{1/1-\alpha}} \qquad (17)$$

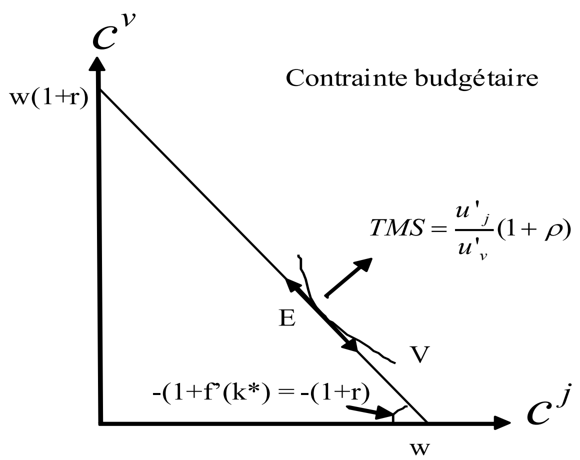
1.7.2 L'état régulier peut être en inefficience dynamique

-Si $\frac{1-\alpha}{(1+n).(2+\rho)}>\frac{\alpha}{n+\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha}(1+n).(2+\rho) < n+\delta \Leftrightarrow f'(k^*) < n+\delta \Leftrightarrow r^* < n$

- Si $\zeta>\alpha \Leftrightarrow$ taux d'épargne $>\alpha$

1.7.3 Illustration graphique de l'inefficience dynamique

Figure 4 : L'équilibre concurrentiel



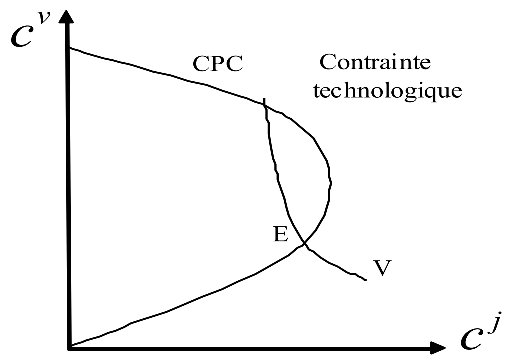


Figure 5 : Un équilibre concurrentiel optimal

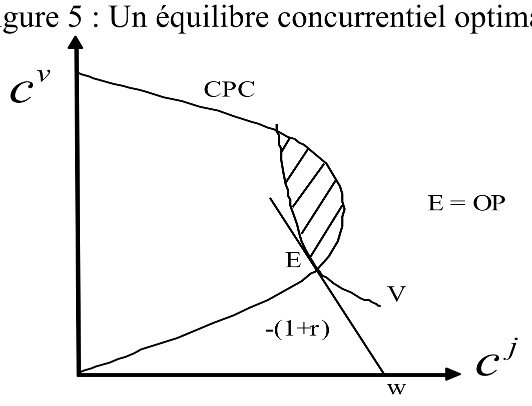


Figure 6 : Un équilibre concurrentiel inefficient

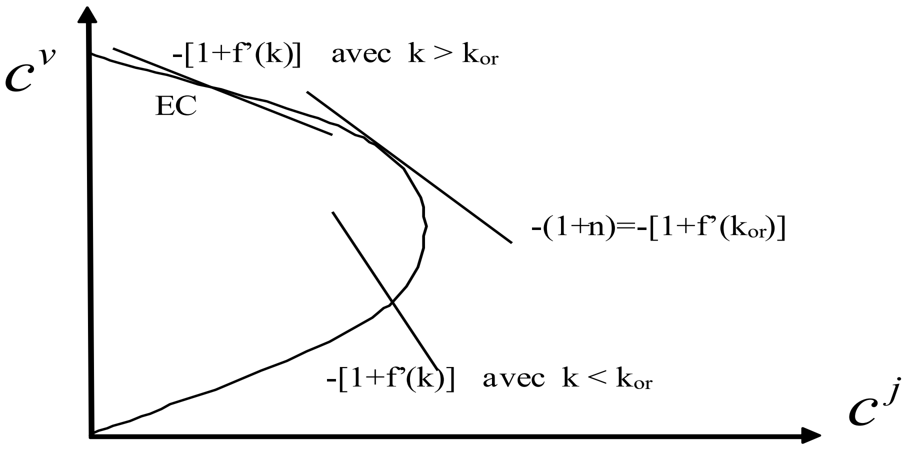


Figure 7 : L'inefficience de l'équilibre concurrentiel en cas de sur accumulation